Propiedades distribucionales de tiempos de pasada asociados a procesos de Lévy

Autores: Jorge Alfonso Cárdenas Treviño, Emiliano Iván Ortiz Arana, Christian Adrian Sánchez León, Roberto Vázquez Martínez, Kapioma Villarreal Haro.

Director del proyecto: Dr. Ehyter Matías Martín González.

Distribución generalizada de valores extremos (DGVE)

La distribución generalizada de valores extremos (DGVE) se encuentra expresada como

$$H_{\xi,a,b}(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1+\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)^{-1/\xi}\right\} & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\left\{-\exp\left\{-\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\}\right\} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

para todo x tal que $1+\xi(\frac{x-b}{a})>0$. Si $\xi>0$, $\xi=0$ y $\xi<0$, la DGVE se reduce a la distribución Fréchet, Gumbel o Weibull, respectivamente. Denotamos por $\phi_H(\mu,\sigma,\alpha)$ a la distribución de extremos H con parámetros μ,σ y α.

Teorema de Fisher-Tippett

Sea $\{X_n, n\in\mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias iid con función de distribución F. Si existen constantes $a_n>0$ y $b_n\in\mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x),$$

entonces G es una distribución de extremos. Recíprocamente, toda distribución de extremos se expresa como un límite de este tipo.

Dominio de atracción maximal

Sea F una función de distribución de valores extremos. Al conjunto de funciones de distribución

$$D(F) = \left\{G : \exists a_n>0, b_n\in\mathbb{R} \text{ tales que } \lim_{n\to\infty} G^n(a_n x+b_n) = F(x)\right\}$$

lo llamamos dominio de atracción maximal de F.

Función de exceso promedio (FEP)

Sea X una variable aleatoria no negativa con distribución F tal que $\overline{F}(u)>0$ para cierto $u>0$. A la función $e_F:[u,\infty)\to[0,\infty)$ dada por

$$e_F(u) = \mathbb{E}[X-u|X>u]$$

la llamaremos función de exceso promedio (de la distribución F o de la variable aleatoria X). Para estimarla, usaremos su estimador empírico. Sean $\{X_k\}_{k=1}^n$ variables aleatorias iid con distribución F y sea $\Delta_n(u) := \{k : X_k > u\}$. Definimos la función de exceso promedio empírica en u como

$$e_{n,F}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Delta_n(u)| = 0, \\ \frac{1}{|\Delta_n(u)|}\Sigma_{k\in\Delta_n(u)}(X_k-u) & \text{si } |\Delta_n(u)| \neq 0. \end{cases}$$

El uso de la función de exceso promedio empírica se justifica por la convergencia casi segura y uniforme de ella a la función de exceso promedio, para conjuntos u - compactos.

Comportamiento de la función de exceso promedio

- Sea F una función de distribución con media finita y $F(0)=0$ $\omega_F=\infty$ y $\lim_{u\to\infty} e_F(u)$ existe. Entonces, F es de cola pesada si y sólo si $e_F(u)\to\infty$ cuando $u\to\infty$.
- Sea $\alpha>1$. Si $F\in D(\phi_{Frechet}(0,1,\alpha))$, entonces

$$\lim_{u\to\infty}\frac{e_F(u)}{u} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

- Si $F\in D(\phi_{Weibull}(0,1,\alpha))$ y F es continua, entonces

$$\lim_{u\to\omega_F}\frac{e_F(u)}{u} = 0.$$

- Sea $F\in D(\phi_{Gumbel}(0,1))$.
  - Si $\omega_F=\infty$, entonces

$$\lim_{u\to\infty}\frac{e_F(u)}{u} = 0.$$

  - Si $\omega_F<\infty$, entonces

$$\lim_{u\to\omega_F}\frac{e_F(u)}{\omega_F-u} = 0.$$

Distribución generalizada de Pareto (DGP)

La distribución generalizada de Pareto se expresa como

$$P_{\xi,a,b}(x) = \begin{cases} 1-\left(1+\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi\neq 0, \\ 1-e^{-\frac{x-b}{a}} & \text{si } \xi=0, \end{cases}$$

tal que $x\geq b$ si $\xi\geq 0$ y $0\leq x\leq -a/\xi+b$ si $\xi<0$.

Teorema de Pickands-Balkema-de Haan

Sea F una función de distribución. $F\in D(H_{\xi,a,b})$ si y sólo si

$$\lim_{u\to\omega_F}\sup_{0<x<\omega_F-u}\left|\frac{\overline{F}(x+u)}{\overline{F}(u)} - \overline{P}_{\xi,a(u),0}(x)\right| = 0,$$

para alguna función medible y positiva $a(u)$.

Modelo clásico de riesgo o de Crámer-Lundberg

En este modelo se considera un proceso $X=\{X(t), t\geq 0\}$ definido como $X(t)=ct-S(t)$, donde $c>0$ y $S=\{S(t), t\geq 0\}$ es un proceso Poisson compuesto con intensidad λ y distribución de saltos F tal que $F(0)=0$.

Aplicación

Planteamiento

Dado un proceso clásico de riesgo $X=\{X(t), t\geq 0\}$, interesa aproximar la distribución de la variable τ_a condicionada al evento $\{\tau_a<\tau_b\}$, donde $\tau_a := \inf\{t\geq 0 : X(t)<a\}$ y $\tau_b := \inf\{t\geq 0 : X(t)>b\}$ con $a<0<b$.

Motivación

Las variables τ_a, τ_b son casos particulares de tiempos de paro asociados a procesos de Lévy y son de interés en diversas aplicaciones. Por ejemplo, la franja delimitada por (a,b) suele indicar que si el capital de una compañía de seguros sale debajo de a antes de pasar por encima de b, entonces las pérdidas de la compañía están siendo considerablemente grandes y no se cuenta con un excedente suficiente para realizar inversiones o pagar un reaseguro.

Objetivo

Existen expresiones para la transformada de Laplace de las variables τ_a, τ_b condicionadas a un par de eventos. Sin embargo, ellas resultan sumamente complicadas de trabajar. Por ello, realizamos un estudio numérico de la variable de interés a través de simulaciones.

Procedimiento

Simulamos distintos procesos clásicos de riesgo (cada uno asociado a un proceso Poisson compuesto con intensidad λ = 1) utilizando tres distribuciones particulares: lognormal, exponencial y Weibull. Las simulaciones aquí expuestas se realizaron considerando tamaños de salto provenientes de una distribución Lognormal(0, ln(4)), y tomando a = -2, b = 2 y c = 2.2. Los resultados obtenidos de todas las simulaciones nos permitieron conjeturar que la distribución asintótica de τ_a condicionado al evento $\{\tau_a<\tau_b\}$ es exponencial.

Resultados

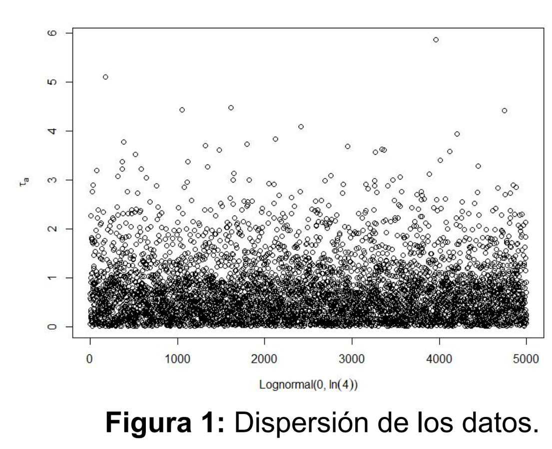

Figura 1: Dispersión de los datos.

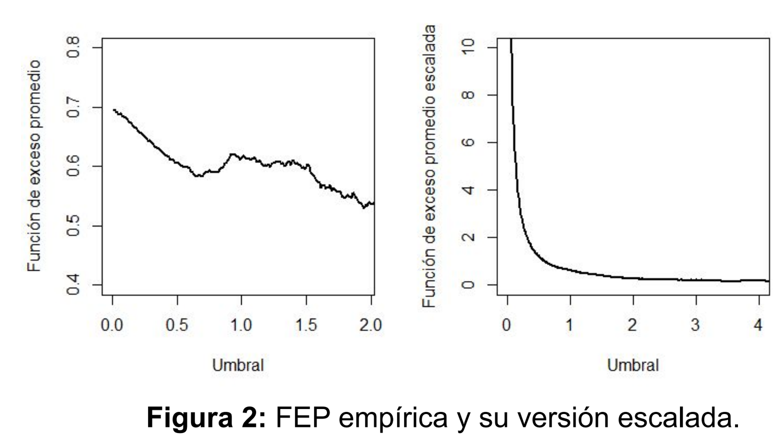

Figura 2: FEP empírica y su versión escalada.

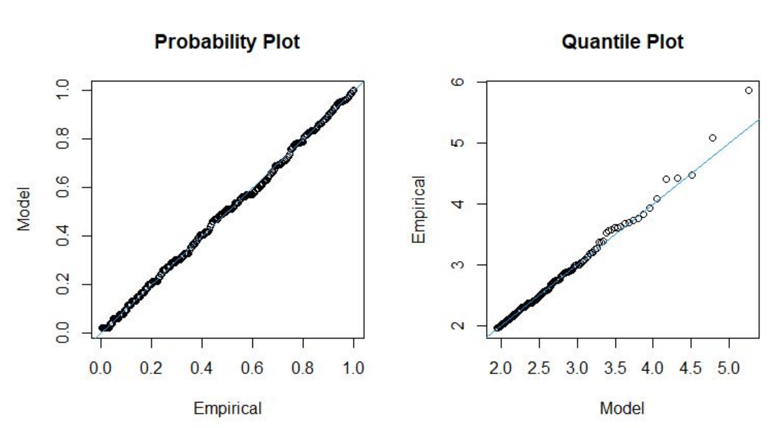

Figura 3: Gráficas de bondad del ajuste de una DGP a los excesos.

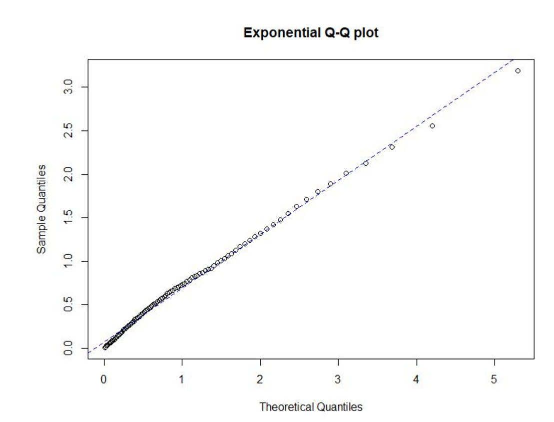

Figura 4: Gráfica QQ del ajuste de una de una distribución exponencial a los excesos.

Análisis de resultados

- La Figura 1 presenta evidencia de que los datos provienen de una distribución con extremo derecho infinito, por lo que el dominio de atracción Weibull queda descartado.
- La Figura 2 no da evidencia en contra de que la distribución asociada tenga cola ligera, con lo cual se descarta el dominio de atracción Fréchet.
- La Figura 3 muestra que, al suponer que la distribución asociada pertenece al dominio de atracción Gumbel, el ajuste de una DGP a los excesos es razonable.
- La Figura 4 indica que el ajuste de una distribución exponencial a los excesos también es bueno. Esto además respalda nuestra conjetura sobre la distribución de la variable aleatoria de interés.