

# Mecanismos Flexibles: Fundamentos de Mecánica de Sólidos.

Isidro Medrano Tapia, Christian Jaime Muñoz Macias,  
Juan Pablo Preciado Romero, y José María Rico Martínez  
Departamento de Ingeniería Mecánica.  
División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca  
Universidad de Guanajuato  
Carretera Salamanca-Valle de Santiago Km. 3.8 + 1.5  
CP 36730, Salamanca, Gto., México  
E-mail: jrico@ugto.mx

25 de julio de 2022

## 1. Introducción.

Estas notas presentan los principios de la mecánica de sólidos sobre los que se fundamenta el análisis y síntesis de mecanismos flexibles, la fuente principal es Howell, [1] y Howell et al., [2]. Se ha procurado mantener los requerimientos teóricos al mínimo posible. Estas notas son parte de los entregables requeridos en el Verano UG en su versión 2022.

## 2. Determinación de la ecuación fundamental de la deflexión en vigas

En esta primera sección, se presenta la teoría de las deformaciones en vigas y como, cuando las deflexiones son elevadas, los métodos de análisis difieren de los que usualmente se emplean en los cursos usuales de Mecánica de Sólidos en los programas de ingeniería mecánica de la gran mayoría de las instituciones de educación superior del país.

La suposición inicial y fundamental de la teoría de la deflexión en vigas es que el momento flector,  $M(x)$  es directamente proporcional a la curvatura de la viga  $\kappa$ , donde  $E I$  es el factor de proporcionalidad.  $E$  es el módulo de elasticidad o Módulo de Young del material, e  $I$  es el segundo momento de área, de la sección transversal de la viga con respecto a su eje neutro. Por lo tanto

$$M(x) = E I \kappa \quad (1)$$

La curvatura de la viga  $\kappa$  es inversamente proporcional al radio de curvatura de la viga. Por lo tanto

$$\kappa = \frac{1}{\rho}. \quad (2)$$

Por otro lado el radio de curvatura de la viga se define alternativamente en términos de la longitud de arco  $s$  de la curva y el ángulo de rodadura  $\theta$  o en términos de la curva elástica de la viga  $y = y(x)$  como

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2) se obtiene

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (1), se llega a la ecuación final.

$$M(x) = \frac{E I \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

Esta es la ecuación fundamental para la determinación de la deflexión en vigas. Es una ecuación diferencial de segundo orden altamente no lineal. En los cursos tradicionales de mecánica de sólidos se supone que la deflexiones de la viga son muy pequeñas de manera que la pendiente de la curva elástica se puede aproximar a cero, de manera que

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0. \quad (6)$$

De esa manera la ecuación fundamental para la determinación de la deflexión en vigas se reduce a

$$M(x) = E I \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (7)$$

La ecuación (7) representa una ecuación diferencial de segundo orden lineal, pero que además puede resolverse por simple integración repetida; un procedimiento conocido desde los cursos tradicionales de cálculo integral.

### 3. Determinación de deflexiones cuando las deformaciones en vigas con elevadas.

Desafortunadamente, cuando se analizan mecanismos flexibles, las deflexiones ya no son pequeñas, de manera que la aproximación representada por la ecuación (6) ya no es satisfactoria y es necesario recurrir a la ecuación inicial. Partiendo de las ecuaciones iniciales (1), (2), y (3), se tiene que

$$M(x) = E I \kappa = E I \frac{1}{\rho} = E I \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}} = E I \frac{d\theta}{ds} \quad (8)$$

La ecuación (8) requiere que la integración se realice con respecto a la longitud de arco de la curva elástica. Se iniciará con un ejemplo muy sencillo. Considere una viga con un extremo empotrado y el otro extremo sujeto a un momento flector constante  $M_0$ .

En este caso, el momento flector para todo  $x$  es constante y está dado por

$$M(x) = M_0$$

La ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{M_0}{E I} = \frac{d\theta}{ds} \quad (9)$$

La ecuación diferencial es de variables separables, de manera que su solución se reduce a una simple integración

$$d\theta = \frac{M_0}{E I} ds \quad \int_0^{\theta_0} d\theta = \frac{M_0}{E I} \int_0^L ds \quad \theta \Big|_0^{\theta_0} = \frac{M_0}{E I} s \Big|_0^L \quad (\theta_0 - 0) = \frac{M_0}{E I} (L - 0) \quad (10)$$

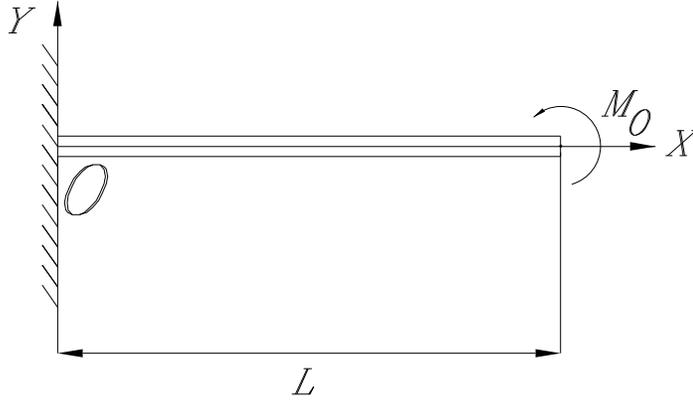


Figura 1: Viga empotrada sujeta a un momento flector constante.

o en su forma final

$$\theta_0 = \frac{M_0 L}{EI} \quad (11)$$

A partir de estos resultados, se puede calcular la constante elástica de la viga empotrada considerada como un resorte torsional. La constante  $K_T$  del resorte está dada por

$$K_T = \frac{M_0}{\theta_0} = \frac{M_0}{\frac{M_0 L}{EI}} = \frac{EI}{L} \quad (12)$$

Si se desea determinar la deflexión vectical,  $b$ , de la curva elástica de la viga empotrada sujeto a un momento flector constante, la ecuación (8) puede reformularse como

$$M(x) = EI \frac{d\theta}{ds} = EI \frac{d\theta}{dy} \frac{dy}{ds} \quad (13)$$

Sin embargo,

$$\frac{dy}{ds} = \text{sen } \theta$$

de manera que la ecuación diferencial resultante está dada por

$$M(x) = EI \text{sen } \theta \frac{d\theta}{dy} \quad (14)$$

De manera que para la viga empotrada sujeta a un momento flector constante  $M_0$ , se tiene que

$$\frac{M_0}{EI} dy = \text{sen } \theta d\theta \quad \int_0^b \frac{M_0}{EI} dy = \int_0^{\theta_0} \text{sen } \theta d\theta \quad \frac{M_0}{EI} y \Big|_0^b = -\cos \theta \Big|_0^{\theta_0} \quad \frac{M_0}{EI} (b-0) = -(\cos \theta_0 - 1) \quad (15)$$

Sustituyendo la ecuación (11) en el resultado de la ecuación (15) se tiene

$$\frac{M_0}{EI} b = 1 - \cos \theta_0 \quad b = \frac{EI}{M_0} (1 - \cos \theta_0) = \frac{EI}{M_0} \left[ 1 - \cos \left( \frac{M_0 L}{EI} \right) \right] \quad (16)$$

Finalmente, se dividen ambos lados de la ecuación por  $L$  para producir una ecuación adimensional

$$\frac{b}{L} = \frac{EI}{M_0 L} \left[ 1 - \cos \left( \frac{M_0 L}{EI} \right) \right] = \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0} \quad (17)$$

De manera semejante, si se desea determinar la deflexión horizontal,  $a$ , de la curva elástica de la viga empotrada sujeto a un momento flector constante, la ecuación (8) puede reformularse como

$$M(x) = EI \frac{d\theta}{ds} = EI \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} \quad (18)$$

Sin embargo,

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta$$

de manera que la ecuación diferencial resultante está dada por

$$M(x) = EI \cos \theta \frac{d\theta}{dx} \quad (19)$$

De manera que para la viga empotrada sujeta a un momento flector constante  $M_0$ , se tiene que

$$\frac{M_0}{EI} dx = \cos \theta d\theta \quad \int_0^a \frac{M_0}{EI} dx = \int_0^{\theta_0} \cos \theta d\theta \quad \frac{M_0}{EI} x \Big|_0^a = \operatorname{sen} \theta \Big|_0^{\theta_0} \quad \frac{M_0}{EI} (a - 0) = \operatorname{sen} \theta_0 - 0 \quad (20)$$

Sustituyendo la ecuación (11) en el resultado de la ecuación (21) se tiene

$$\frac{M_0}{EI} a = \operatorname{sen} \theta_0 \quad a = \frac{EI}{M_0} \operatorname{sen} \theta_0 = \frac{EI}{M_0} \operatorname{sen} \left( \frac{M_0 L}{EI} \right) \quad (21)$$

Finalmente, se dividen ambos lados de la ecuación por  $L$  para producir una ecuación adimensional

$$\frac{a}{L} = \frac{EI}{M_0 L} \operatorname{sen} \left( \frac{M_0 L}{EI} \right) = \frac{\operatorname{sen} \theta_0}{\theta_0} \quad (22)$$

### 3.1. Ejemplo de determinación de las deformaciones elevadas de una viga.

**Problema.** Considere el ejemplo de una viga empotrada de una longitud  $L = 1 \text{ m}$ , de sección transversal rectangular de base  $c = 4 \text{ cm}$  y altura  $h = 8 \text{ cm}$ . El material de la viga es polipropileno, con un módulo de Young de  $E = 8.25 \text{ GPa}$  y un esfuerzo de cedencia a la flexión de  $S_{yf} = 10 \text{ GPa}$ , vea MatWeb [3]. Determine el máximo ángulo de deformación, la constante del resorte torsional, y las coordenadas  $(a, b)$  del extremo libre de la viga empotrada.

**Solución.** Primero se determinará el segundo momento de área de la sección transversal de la viga

$$I = \frac{1}{12} c h^3 = \frac{1}{12} (4.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}) (8.0 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3 = 170.666 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

A continuación se determina el momento máximo que puede soportar la viga y producir deformaciones elásticas. Se empleará el esfuerzo de cedencia a la flexión como una aproximación del límite elástico del material, entonces

$$S_{yf} = \frac{M_0 \frac{h}{2}}{I} \quad \text{por lo tanto} \quad M_0 = \frac{2 S_{yf} I}{h} = \frac{2(10 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2)(170.666 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4)}{8.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 42666.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Entonces, el ángulo de rotación máxima,  $\theta_0$  está dada por

$$\theta_0 = \frac{M_0 L}{EI} = \frac{(42666.5 \text{ N} \cdot \text{m})(1 \text{ m})}{(8.25 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2)(170.666 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4)} = 3.0303 \text{ rad} = 173.623^\circ$$

Debe tomarse en cuenta que el cálculo del valor del ángulo de deformación no contiene factor de seguridad, de manera que en la práctica los ángulos de deformación deben 2 o 3 veces menores.

La constante del resorte torsional está dado por

$$K_T = \frac{EI}{L} = \frac{(10 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2)(170.666 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4)}{1 \text{ m}} = 1706.66 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El cálculo de las posiciones del extremo de la viga sujeta a deformaciones elásticas elevadas, para  $\frac{\pi}{2} \geq \theta_0$ , se realiza mediante un programa Maple de acuerdo con las ecuaciones (17) y (22). Los resultados se muestran en la figura 2.

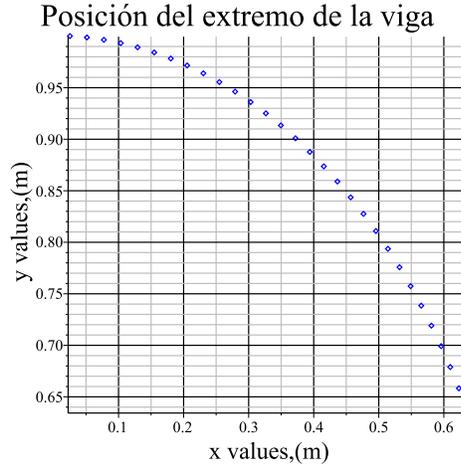


Figura 2: Posición del extremo libre de la viga empotrada.

#### 4. Modelos de cuerpos pseudo-rígidos como eslabones de mecanismos flexibles

Después de analizar las deflexiones elevadas en vigas empotradas, esta sección analiza los cuerpos pseudo-rígidos como eslabones de mecanismos flexibles. Estos cuerpos se modelan como vigas con dos segmentos: Un segmento corto y muy flexible y otro segmento mucho mas largo y rígido. Es decir se requiere que

$$L \gg l \quad (EI)_L \gg (EI)_l \quad (23)$$

El segmento corto o flexible se denomina un **pivote de pequeña longitud sujeto a flexión** o por simplicidad **pivote de flexión**. Las ecuaciones de las deflexiones horizontales y verticales del extremo libre del segmento corto, definidas en la figura 3 están dadas por

$$\theta_0 = \frac{M_0 l}{(EI)_l} \quad \frac{\delta_y}{l} = \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0} \quad \frac{\delta_x}{l} = 1 - \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \quad (24)$$

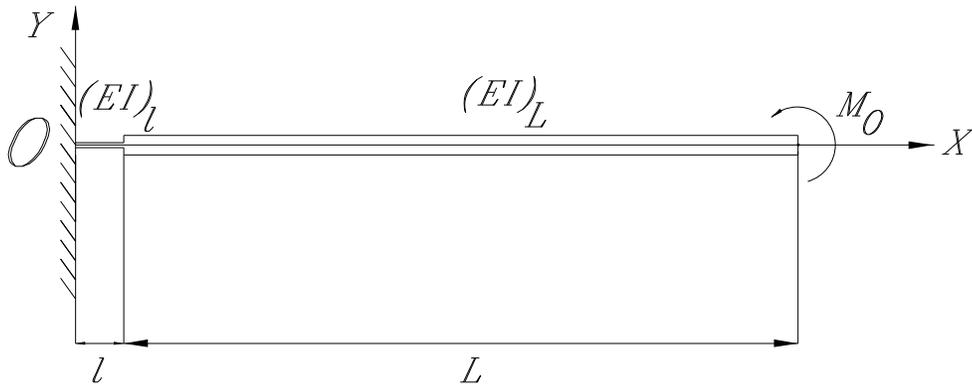


Figura 3: Modelo de cuerpo pseudo-rígido.

Puesto que la longitud del segmento flexible es mucho mas corto que la del segmento rígido, el movimiento de la viga respecto al eslabón fijo puede modelarse como dos cuerpos rígidos unidos mediante un par de revoluta como **pivote característico**. El pivote característico se localiza en el centro del segmento corto o pivote de flexión. Esta suposición es razonable porque las deflexiones que ocurren en

el segmento flexible son muy pequeñas comparadas con la longitud del segmento rígido. De hecho, casi cualquier punto del segmento flexible puede emplearse como pivote característico y el centro del segmento flexible se emplea por conveniencia.

El ángulo de rotación del cuerpo pseudo-rígido  $\Theta$  es igual al ángulo de deflexión del segmento flexible; es decir:

$$\Theta_0 = \theta_0 \quad (25)$$

Las coordenadas  $(a, b)$  del extremo de la viga se puede aproximarse por

$$a = \frac{l}{2} + (L + \frac{l}{2}) \cos \Theta \quad b = (L + \frac{l}{2}) \sin \Theta \quad (26)$$

o expresado en forma adimensional

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{2} + (\frac{L}{l} + \frac{1}{2}) \cos \Theta \quad \frac{b}{l} = (\frac{L}{l} + \frac{1}{2}) \sin \Theta \quad (27)$$

Dada una deflexión angular, las secciones rígidas de la viga aproximada por el modelo de cuerpo pseudo-rígido y la calculada son paralelas de manera que la distancia  $d$  entre los puntos correspondientes de la trayectoria determinados por ambos métodos sean los mismos en ambos extremos de la sección rígida. La distancia  $d$  disminuye a medida que la longitud del segmento flexible,  $l$ , disminuye. La precisión del modelo del cuerpo pseudo-rígido es elevada pues las longitudes de los segmentos flexibles son pequeñas comparadas con las longitudes de los segmentos rígidos.

## Referencias

- [1] Howell, L. L. *Compliant Mechanisms*, John Wiley and Sons: New York, (2001).
- [2] Howell, L. L., Magleby, S. P., y Olsen, B. M. *Handbook of Compliant Mechanisms*, John Wiley and Sons: New York, (2013).
- [3] <https://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=08fb0f47ef7e454fbf7092517b2264b2&ckck=1> MatWeb Materials Properties Data, revisado el 23 de Julio del 2022.